Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Ola Diserud
Telefon: 932 18 823

ST1101 SANNSYNLIGHETSREGNING /
ST6200 SANNSYNLIGHETSREGNING

Torsdag 29. mai 2008
Tid: kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Lommekalkulator.

Sensur: 19. juni 2008

Oppgave 1

For å øke sjansene for å vinne i spillet ”syv” (om å gjøre å få summen syv på to terninger) har en skruppelløs spiller puttet vekter på sekser-siden på en terning og på ener-siden på en annen terning. Spilleren får da følgende sannsynlighetsfordeling:

Side	1	2	3	4	5	6
Første terning	0,5	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Andre terning	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

a) Kan vi her anta at de to terningene er uavhengige?
Spilleren kaster så de to terningene. Finn sannsynligheten for at summen av de to sidene blir syv.

b) Finn videre sannsynligheten for at de to terningene viser det samme.
En terning velges tilfeldig og viser, etter et kast, en sekser. Hva er sannsynligheten for at dette er den ”Første terningen”?
.

Oppgave 2

Vi skal her benytte en medisinsk test hvor vi tester for en gitt sykdom. Anta at vi har k personer, hvor $k > 1$, og at sannsynligheten for at en vilkårlig person har sykdommen er p. Det lanseres to alternative strategier for å teste de k personene:

A: Hver person testes separat.

B: Prøvene fra alle de k personene slås sammen til en stor prøve. Hvis den sammenslåtte prøven gir et negativt utslag (dvs. ingen sykdom) har ingen av personene sykdommen. Hvis vi derimot får et positivt utslag må vi gå videre og teste hver enkelt person.

La X være den tilfeldige variabelen som angir antall tester som trengs for strategi B.

a) Sett opp sannsynlighetsfordelingen til X.

Hva blir forventningsverdien $E(X)$?

b) Strategi B slår strategi A (ved å bruke færre tester) hvis $E(X) < k$. Denne ulikheten er oppfylt dersom $p < f(k)$ hvor $f(k)$ er en funksjon av k. Finn $f(k)$.

Anta videre at vi har n personer, hvor $n \gg k$, og at vi kan dele de n personene inn i m grupper på k personer ($n = m \times k$). Strategi B brukes så på hver av de m gruppene. Hvis vi antar at gruppene er uavhengige, vis at forventet antall tester som nå må utføres blir $n\left[1+\frac{1}{k}-(1-p)^k\right]$.

Oppgave 3

Vi skal her se på ankomst- og oppholdstider for et lokaltog på en stasjon. Toget skal etter rutetabellen ankomme hver hverdag kl. 08:00, men kommer alltid etter dette tidspunktet. La X (minutter) betegne togets forsinkelse på en tilfeldig valgt hverdag. Vi antar at X er en tilfeldig variabel med fordeling

$$g(x) = \begin{cases} kxe^{-2x} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$$

der k er en konstant.

[Hint: I denne oppgaven kan du bruke at $\int_0^\infty x^r e^{-ax} dx = \frac{r!}{a^{r+1}}$ hvor $a > 0$ og r er et heltall ≥ 0.]

a) Finn k.
Hva er den forventede forsinkelse for toget?
Vis at sannsynligheten for at toget er mer enn 2 minutter forsinket er tilnærmet lik 0,09.

b) La V være antall ganger i løpet av en måned (= 22 hverdager) at toget er mer enn 2 minutter forsinket. Foreslå en sannsynlighetsfordeling for V og sett opp de antagelsene som ligger til grunn.
Hva er sannsynligheten for at toget er mer enn 2 minutter forsinket minst 2 ganger i løpet av en måned?
Hva er (tilnærmet) sannsynlighet for at toget er mer enn 2 minutter forsinket mer enn 30 ganger i løpet av 220 hverdager?

La Y (minutter) være den tiden toget står på stasjonen. Oppholdstiden Y vil være påvirket av forsinkelsen, og vi antar at den betingede sannsynlighetsfordelingen $f(y\,|\,x)$ er gitt ved

$$f(y\,|\,x) = \begin{cases} (x/2)e^{-xy/2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

c) Hvilken fordeling har Y når det er gitt at forsinkelsen er 2 minutter?
Hva er forventet oppholdstid når forsinkelsen er 2 minutter?
Sett opp simultantettheten $f(x, y)$ for X og Y.
Finn sannsynlighetsfordelingen $h(y)$ for oppholdstiden Y.

Oppgave 4

La X være antall kast med en mynt som trengs for å få første kron. Da blir $p_X(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ for $x = 1, 2, 3, \ldots$. Utled uttrykket for den momentgenererende funksjonen $M_X(t)$. Bruk så $M_X(t)$ for å finne forventningsverdien og variansen til X.